



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA PE ȘCOALĂ CU SUBIECT UNIC**  
**CLASA a 12-a**  
**București, 13 februarie 2026**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** Fiecare problemă este notată cu 22,5 de puncte, punctajul maxim posibil fiind 100 puncte, din care 10 puncte sunt din oficiu.

**Problema 1** (autor Ștefania Constantinescu)

Se consideră un grup  $(G, \cdot)$  și  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow G$  morfisme de la grupul  $(\mathbb{Z}, +)$  în grupul  $(G, \cdot)$ , cu proprietatea că există două numere întregi  $a$  și  $b$ , prime între ele, astfel încât  $f(a) = g(a)$  și  $f(b) = g(b)$ . Arătați că  $f = g$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
$f(kt) = f(t)^k$ și $g(kt) = g(t)^k$ , pentru orice numere întregi $k$ și $t$ .	10p
Există numerele întregi $p$ și $q$ cu $pa + qb = 1$ , deci $kpa + kqb = k$ , pentru orice număr întreg $k$ .	2,5p
$f(k) = f(kpa + kqb) = f(kpa) \cdot f(kqb) = f(a)^{kp} \cdot f(b)^{kq} = g(a)^{kp} \cdot g(b)^{kq} = g(kpa) \cdot g(kqb) = g(kpa + kqb) = g(k)$ , pentru orice întreg $k$ , deci $f = g$ .	10p

**Problema 2** (autor Florin Rotaru, G.M. 6-7-8/2025)

a) Fie  $0 \leq a < b$  și o funcție derivabilă  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $\int_a^b f(x) dx = bf(a) - af(b)$ .

Arătați că există  $c \in (a, b)$  cu  $f'(c) = 0$ .

b) Dați un exemplu de funcție derivabilă  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $\int_{-1}^1 f(x) dx = f(-1) + f(1)$

și  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in [-1, 1]$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Considerăm funcția <math>g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>g(x) = (a + b - x)f(x) + \int_a^x f(t) dt</math>. Cum</p> <p><math>g(b) = af(b) + \int_a^b f(t) dt = af(b) + bf(a) - af(b) = bf(a) = g(a)</math> și <math>g</math> este derivabilă, din teorema lui Rolle rezultă că există <math>c \in (a, b)</math> cu <math>g'(c) = 0</math>.</p>	11p

Cum $g'(x) = (a+b-x)f'(x)$ , atunci $(a+b-c)f'(c) = 0$ . Dar $c < b \leq a+b$ , deci $f'(c) = 0$ .	<b>1,5p</b>
b) Fie $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x$ . Avem $\int_{-1}^1 x dx = 0 = f(-1) + f(1)$ și $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [-1,1]$ .	<b>10p</b>

**Problema 3** (autor Marian Andronache)

Fie  $(M, \cdot)$  un monoid finit cu cel puțin două elemente. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a^n \neq a$ , oricare ar fi  $a \in M$ ,  $a \neq e$ , unde  $e$  este elementul neutru al monoidului.  
b)  $(M, \cdot)$  este grup.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $k \geq 2$ numărul elementelor lui $M$ . $b) \Rightarrow a)$ Cum $(M, \cdot)$ este grup, rezultă că $a^k = e$ , oricare ar fi $a \in M$ , deci $a^k \neq a$ , oricare ar fi $a \in M$ , $a \neq e$ .	<b>10p</b>
$a) \Rightarrow b)$ Fie $a \in M$ . Cum două din elementele $a, a^2, a^3, \dots, a^k, a^{k+1}$ sunt egale, există $p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $a^p = a^{p+q}$ , și, inductiv, prin înmulțire cu $a^q$ , rezultă că $a^p = a^{p+rq}$ , oricare ar fi $r \in \mathbb{N}$ . Alegem $r$ astfel încât $rq > p$ . Prin înmulțirea ultimei egalități cu $a^{rq-p}$ obținem $a^{rq} = a^{2rq}$ .	<b>10p</b>
Fie $b = a^{rq}$ . Cum $b^2 = b$ , rezultă $b^n = b$ , deci $b = e$ . Din $a^{rq} = e$ deducem că $a$ este simetrizabil, deci $(M, \cdot)$ este grup.	<b>2,5p</b>

**Problema 4** (autor Marian Andronache)

Fie  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă pe orice interval  $[a, b] \subset [1, \infty)$  și șirul  $(a_n)_{n \geq 2}$ ,

cu  $a_n = \frac{1}{\ln n} \int_1^n \frac{f(x)}{x} dx$ . Știind că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ , calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din lema lui Stolz-Cesaro, este suficient să calculăm $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx$	<b>3p</b>

<p>Fie <math>\varepsilon &gt; 0</math> și <math>\delta_\varepsilon &gt; 1</math> astfel încât <math>1 - \frac{\varepsilon}{2} &lt; f(x) &lt; 1 + \frac{\varepsilon}{2}</math>, pentru orice <math>x \in (\delta_\varepsilon, \infty)</math>. Fie <math>n &gt; \delta_\varepsilon</math>. Cum <math>\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x} &lt; \frac{f(x)}{x} &lt; \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{x}</math> pentru orice <math>x \in [n, n+1]</math>, prin integrare de la <math>n</math> la <math>n+1</math> obținem</p> $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n) \leq \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln n)$	<b>15p</b>
<p>Cum <math>1 - \varepsilon &lt; 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\ln(n+1) - \ln n} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} &lt; 1 + \varepsilon</math>, pentru orice <math>n \geq [\delta_\varepsilon] + 1</math>, rezultă că <math>L = 1</math>, deci <math>\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1</math>.</p>	<b>4,5p</b>